FORMULE PER IL CALCOLO DELLA RATA COSTANTE POSTICIPATA IN REGIME COMPOSTO E IN REGIME SEMPLICE DEGLI INTERESSI CON L'USO DEL FOGLIO ELETTRONICO ⊗

di GRAZIANO ARETUSI

16 maggio 2021

Introduzione.

Quando si studia un prestito graduale, gli elementi che devono essere noti per definire l'operazione di scambio sono: la durata, la frequenza del rimborso (mensile, trimestrale, …), la tipologia di ammortamento (a rata costante, a quote capitale costanti, …), il regime di interessi (semplice o composto) e l'epoca di impostazione rispetto alla quale imporre l'equilibrio finanziario (solitamente l'epoca iniziale o quella finale).[1]

Tra le varie tipologie di prestiti graduali, la più diffusa è quella a rata costante posticipata (c.d. "alla francese"), con l'utilizzo di una convenzione temporale in cui un anno è composto da 360 giorni e un mese da 30 giorni (c.d. "30/360"). Dato l'ampio utilizzo di tali operazioni, è molto utile poter calcolare, in maniera diretta, l'importo della rata a partire dalle informazioni a disposizione nel contratto quali: l'importo del capitale finanziato, il tasso di interesse e la frequenza dei rimborsi. In questo breve lavoro ricaveremo, per detta tipologia di prestiti graduali, le formule che consentono di calcolare (direttamente) l'importo della rata costante posticipata, sia in regime composto che in regime semplice degli interessi. Mostreremo, inoltre, come tali formule possono essere applicate con l'utilizzo dei comuni fogli elettronici.

⊗ Lo scritto costituisce materiale divulgativo messo a disposizione degli utenti registrati al sito Openstat.it, www.openstat.it e-mail: info@openstat.it

[1] *«Essendo molteplici le scadenze sia delle prestazioni che delle controprestazioni, bisognerà fissare anche un'epoca di riferimento e intendere che tra le prestazioni e le controprestazioni debba sussistere il vincolo che, riportandole, con la legge di interesse o sconto prescelta, all'epoca di riferimento pure prefissata, il valore delle prime eguagli il valore delle seconde».* Cfr. E. Levi, *Corso di Matematica Finanziaria*, La Goliardica, Milano, 1959.

Scambio e posizione di equilibrio: i prestiti graduali a rata costante posticipata.

In matematica applicata all'economia esiste un principio naturale, noto come principio di equità, che garantisce che un'operazione di scambio possa avere corso. Tale principio pervade la nostra quotidianità, poiché è il meccanismo naturale che regola lo scambio tra soggetti. In letteratura tale principio è ampiamente descritto, ad esempio, nelle opere di Demaria, Bonferroni, Polidori, Levi, Moriconi (solo per citare alcuni illustri autori).

In generale, una qualsiasi operazione di scambio di denaro tra due soggetti sarà *equa* allorché, in un dato istante iniziale, due soggetti si scambiano contestualmente (istantaneamente) la stessa somma di denaro. Solo in tal caso i due soggetti accetteranno di concludere lo scambio poiché, altrimenti, uno dei due soggetti rileverebbe il proprio svantaggio (e il vantaggio altrui).

Per comprendere la *ratio* naturale dello scambio istantaneo, basti pensare a quante volte ci sarà capitato di avere la necessità di scambiare una banconota con altre di taglio più piccolo. Ad esempio, se dovessi scambiare una banconota da 100 euro con banconote da 20 euro, lo scambio avverrà solo avendo 5 banconote da 20 euro in cambio; se volessero restituirmi 4 banconote da 20 euro non accetterei lo scambio. Allo stesso modo, se chiedessi 6 banconote da 20 euro in cambio della banconota da 100 euro, lo scambio non avrebbe corso perché il mio interlocutore non accetterebbe. Ovviamente, si potrebbe decidere di scambiare la banconota da 100 euro secondo quote diverse. Ad esempio, si potrebbe costituire lo scambio della banconota da 100 euro con un'unica quota da 100 euro, così come lo scambio potrebbe costituirsi con 20 banconote da 5 euro, oppure con 10 quote da 10 euro o, anche, con 3 banconote da 20 euro e 4 da 10 euro. Tutte e sole quelle combinazioni di quote che portano alla costituzione dei 100 euro (valore oggetto dello scambio), consentiranno che lo scambio possa avere corso. La stessa cosa accade, quotidianamente, quando ci si reca a fare la spesa al supermercato. Ad esempio, volendo acquistare merce per un totale di 45 euro pagando con una banconota da 100 euro, lo scambio avverrà solo avendo 55 euro di resto. Solo in questo modo il valore complessivo delle due quote (45 euro di spesa e 55 euro di resto) costituirà esattamente il valore complessivo di 100 euro oggetto dello scambio e, così, l'operazione potrà avere corso.

Questo principio vale in generale, per qualsiasi altro importo oggetto dello scambio. Ad esempio, potrei acquistare due calcolatori da 500 euro ognuno, pagando un importo complessivo di 1000 euro; oppure scambiare una banconota da 5 euro per l'acquisto di 5 arancini del valore di 1 euro l'uno; o anche prendere in prestito 10 mila euro concordando di scambiare tale importo con 3 quote da 2 mila euro e 1 quota da 4 mila euro. Qualsiasi sia il valore totale oggetto dello scambio, affinché lo scambio possa avere corso, il principio di equità richiede che il valore totale delle quote scambiate costituisca il valore

complessivo oggetto dello scambio. È intuitivamente evidente, allora, che l'equità costituisce un principio naturale senza il quale non si avrebbe la garanzia che lo scambio possa avvenire. In violazione del principio di equità, infatti, lo scambio potrà avvenire solo se una delle due parti non rilevasse il vantaggio altrui. Ad esempio, sarà sicuramente capitato di fare la spesa al supermercato e, tornati a casa, accorgersi di aver avuto un resto sbagliato, oppure, che degli articoli in offerta sono stati, invece, battuti ad un prezzo più alto; in questo caso si torna al supermercato e si chiede di avere indietro il maggiore valore corrisposto impropriamente al momento dello scambio. Il supermercato, essendo un operatore del commercio qualificato, riconoscerà l'errore e sarà disposto a restituire la differenza. In altre parole, lo scambio è avvenuto perché uno dei due operatori non si è accorto del vantaggio altrui, ma nel momento in cui l'operatore svantaggiato si accorge dell'altrui vantaggio, chiede subito di ripristinare l'equilibrio dello scambio.
Formalmente, in linea con la teoria matematica delle operazioni finanziarie eque, e rinviando al costrutto teorico definito negli articoli di Mari e Aretusi[2], qualsiasi sia il valore del capitale S oggetto dello scambio, allora uno scambio istantaneo potrà avere corso in dato istante $t = 0$, se il valore totale delle m quote S_k poste in cambio di S, costituisce complessivamente il valore oggetto dello scambio, cioè che

$$S = \sum_{k=1}^{m} S_k \ . \qquad (1)$$

Le quote S_k sono dette quote di costituzione del capitale S.
L'equazione (1) rappresenta il principio fondamentale di equilibrio dello scambio e garantisce che l'operazione possa avere corso in un dato istante; in violazione del principio di equità (1), l'operazione potrà avere corso solo se uno dei due operatori non rilevasse il vantaggio altrui nello scambiare una somma di denaro con un'altra somma più bassa.
Se lo scambio non avviene istantaneamente al tempo 0, ma le m quote S_k di costituzione del capitale S vengono restituite (assieme agli interessi) in tempi futuri, allora, per ognuna di queste quote si dovrà calcolare il valore futuro (montante) nel regime di interessi pure prefissato. In tal caso si parlerà di prestito graduale; esso sarà regolato dal tasso i nel regime di interessi prescelto.
Se il regime di interessi prescelto per lo scambio è quello composto, allora, impostando l'equilibrio al tempo iniziale 0, la (1) diviene

---

[2] Mari C., Aretusi G., "*Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare*", in Rivista IL RISPARMIO, 1-2018; Mari C., Aretusi G., "*Sull'ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice: alcune considerazioni concettuali e metodologiche*", *in* Rivista IL RISPARMIO, pagg. 115-151, 1-2019.

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{(1+i)^k} \qquad (2)$$

mentre, se l'equilibrio è imposto al tempo finale m, la (1) diviene

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \frac{(1+i)^{(m-k)}}{(1+i)^m} \quad . \qquad (3)$$

Le equazioni (2) e (3) stabiliscono l'uguaglianza tra il valore attuale in regime composto delle rate di rimborso e il capitale erogato inizialmente, rispettivamente, con impostazione iniziale dell'equilibrio e con impostazione finale dell'equilibrio; tali equazioni garantiscono che il prestito graduale possa avere corso in regime composto degli interessi.
Si può facilmente verificare che, nel caso del regime composto, la (2) e la (3) sono equivalenti, data la possibilità di sfruttare le proprietà algebriche delle potenze; da ciò derivano le proprietà c.d. di scindibilità del regime composto, che consentono di semplificare l'equazione (3) nella (2), come quoziente di potenze con la stessa base[3].
Invece, se il regime di interessi prescelto per lo scambio è quello semplice, impostando l'equilibrio al tempo iniziale 0, la (1) diviene

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{(1+ki)} \qquad (4)$$

mentre, se l'equilibrio è imposto al tempo finale m, la (1) diviene

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \frac{(1+(m-k)i)}{(1+mi)} \quad . \qquad (5)$$

Le equazioni (4) e (5) stabiliscono l'uguaglianza tra il valore attuale in regime semplice delle rate di rimborso e il capitale erogato inizialmente, rispettivamente, con impostazione iniziale e con impostazione finale dell'equilibrio; tali equazioni garantiscono che il prestito graduale possa avere corso in regime semplice degli interessi.
A differenza del regime composto, nel caso del regime semplice, la (4) e la (5) non sono equivalenti, non potendosi sfruttare le proprietà delle potenze. Per tale ragione, il regime semplice degli interessi non gode della proprietà di scindibilità.
Le precedenti equazioni consentono di comprendere che i prestiti graduali possono essere decomposti come somme di prestiti elementari,

---

[3] Sfruttando le proprietà algebriche delle potenze, risulta immediatamente che

$$\frac{(1+i)^{(m-k)}}{(1+i)^m} = (1+i)^{(m-k-m)} = (1+i)^{-k} = \frac{1}{(1+i)^k}$$

rispettivamente, in regime composto e in regime semplice degli interessi.[4]

Tra le diverse tipologie di prestiti graduali, la più diffusa è quella a rata costante posticipata (c.d. alla francese) che prevede l'erogazione del capitale S al tempo 0 e un rimborso costante alla fine di ogni istante temporale, tale che

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_m = R \ .$$

In tali operazioni, la convenzione maggiormente utilizzata dagli operatori per il conteggio dei giorni (*day-count convention*), è quella denominata 30/360, che considera un anno composto da 360 giorni e un mese da 30 giorni.[5]

Per queste tipologie di prestiti graduali, nel caso del regime composto la (2) e la (3) divengono

$$S = R \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+i)^k} \ . \qquad (6)$$

Nel caso del regime semplice, invece, la (4) diviene

$$S = R \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+ki)} \ , \qquad (7)$$

mentre la (5) diviene

$$S = R \sum_{k=1}^{m} \frac{(1+(m-k)i)}{(1+mi)} \ . \qquad (8)$$

L'ampio utilizzo di questo tipo di prestiti (a rata costante posticipata con convenzione temporale 30/360) è dovuto al fatto che il debitore riesce a programmare più facilmente l'operazione finanziaria, dal momento che dovrà pianificare un esborso costante di denaro nel tempo, con un orizzonte temporale distribuito su intervalli prefissati e uniformi; per questo tipo di operazioni, nelle seguenti sezioni mostreremo le formule che consentono di calcolare, direttamente, l'importo della rata, sia in regime composto che in regime semplice degli interessi, a partire dalle informazioni a disposizione nel contratto. Saranno, altresì, proposti esempi di calcolo su foglio elettronico. Per comodità si considererà un prestito graduale di euro $S = 10.000{,}00$

---

[4] Cfr. Aretusi G., "*Brevi note sulla presunta assenza di anatocismo nei prestiti graduali in regime composto, con esempi per l'ammortamento francese, italiano e bullet*", in IL CASO.it https://openstat.it/matematica-finanziaria-econometria-anatocismo/decomposizione-francese-italiano-bullet-anatocismo/

[5] Altre tipologie di convenzioni temporali sono denominate *actual*/360 e *actual*/*actual*, dove con il termine *actual* si intende il numero effettivo di giorni tra due date di calendario. Cfr. https://www.isda.org/a/AIJEE/1998-ISDA-memo-%E2%80%9CEMU-and-Market-Conventions-Recent-Developments%E2%80%9D.pdf

con rimborso in $m = 180$ rate mensili costanti posticipate al tasso di interesse mensile $i = 0{,}417\%$ ottenuto come $\frac{5\%}{12}$.[6]

Formula di calcolo della rata costante posticipata in regime composto.

Dato il prestito graduale in equazione (6), in Appendice 1 si dimostra che la rata R si può calcolare secondo la seguente formula:

$$R = S\frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m - 1} \ .$$

Ad esempio, per il prestito graduale di euro $S = 10.000{,}00$ con rimborso in $m = 180$ rate mensili costanti posticipate al tasso di interesse mensile $i = 0{,}417\%$, si ottiene che

$$R = 10.000{,}00\frac{0{,}417\%(1+0{,}417\%)^{180}}{(1+0{,}417\%)^{180} - 1} = 79{,}08 \ .$$

Il calcolo può essere replicato con un comune foglio elettronico di calcolo nel seguente modo:

	A	B	C	D	E
1	***S***	10.000,00			
2	***i***	0,417%	=5%/12		
3	***m***	180	=15*12		
4	***R***	79,08	=B1*(B2*(1+B2)^B3)/((1+B2)^B3-1)		

Formula di calcolo della rata costante posticipata in regime semplice.

Dato il prestito graduale in equazione (7), in Appendice 2 si dimostra che, si può ricavare una buona approssimazione $\hat{R}$ della rata R secondo la seguente formula:

$$R = \frac{S}{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(1+i)^k}} \approx \hat{R} = \frac{S}{\frac{1}{i}\ln\left(\frac{2+(2m-1)i}{2-i}\right) - 1 + \frac{1}{1+mi}} \ .$$

Nel caso di prestiti graduali a rata costante mensile o trimestrale, per durate di oltre 5 anni (largamente diffusi sul mercato), tale approssimazione risulta essere sufficientemente precisa.

[6] La teoria dei tassi equivalenti insegna che, dato un tasso annuale i, volendo calcolare il tasso periodale i_q per la frazione q di anno (ad esempio $q = 1/2$ nel caso del semestre di un anno di 360 giorni e mesi tutti di 30 giorni) risulta: in regime composto $i_q = (1+i)^q - 1$; in regime semplice $i_q = i \cdot q$. Bisogna rilevare che, nella pratica bancaria, l'utilizzo del regime composto non è quasi mai accompagnato dall'uso di tassi equivalenti. Piuttosto si utilizzano tassi convertibili n volte (calcolati come $i_n = {}^{i}/_{n}$ dove, ad esempio, n è pari a 2 nel caso di rimborsi semestrali, 4 nel caso di rimborsi trimestrali, 12 nel caso di rimborsi mensili).

Ad esempio, per il prestito graduale di euro $S = 10.000{,}00$ con rimborso in $m = 180$ rate mensili costanti posticipate al tasso di interesse mensile $i = 0{,}417\%$, si ottiene che

$$\hat{R} = \frac{10.000{,}00}{\frac{1}{0{,}417\%}\ln\left(\frac{2 + (2 \cdot 180 - 1) \cdot 0{,}417\%}{2 - 0{,}417\%}\right) - 1 + \frac{1}{1 + 180 \cdot 0{,}417\%}} = 74{,}57$$

Il calcolo può essere replicato con un comune foglio elettronico di calcolo nel seguente modo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	***S***	10.000,00						
2	***i***	0,417%	=5%/12					
3	***m***	180	=15*12					
4	***R***	74,57	=B1/((1/B2)*LN((2+(2*B3-1)*B2)/(2-B2))-1+(1/(1+180*B2)))					

§ § §

Dato il prestito graduale in equazione (8), in Appendice 3 si dimostra che la rata R si può calcolare secondo la seguente formula:

$$R = \frac{S(1 + mi)}{\left(m + i\frac{m(m-1)}{2}\right)} \ .$$

Ad esempio, per il prestito graduale di euro $S = 10.000{,}00$ con rimborso in $m = 180$ rate mensili costanti posticipate al tasso di interesse mensile $i = 0{,}417\%$, si ottiene che

$$R = 10.000{,}00\frac{(1 + 180 \cdot 0{,}417\%)}{\left(180 + 0{,}417\%\frac{180(180-1)}{2}\right)} = 70{,}81 \ .$$

Il calcolo può essere replicato con un comune foglio elettronico di calcolo nel seguente modo:

	A	B	C	D	E	F
1	***S***	10.000,00				
2	***i***	0,417%	=5%/12			
3	***m***	180	=15*12			
4	***R***	70,81	=B1*(1+B3*B2)/(B3+B2*(B3*(B3-1))/2)			

Considerazioni conclusive.

In questo lavoro abbiamo introdotto alcuni fondamenti della teoria dello scambio economico e descritto la condizione generale, nota come principio di equità, che ne consente la realizzazione: ad esempio, potrei scambiare una banconota da 100 euro con altre di taglio più piccolo, ma sempre del valore complessivo di 100 euro. Diversamente, non sarei mai disposto a scambiare 100 euro, rendendo un importo maggiore, come anche il mio interlocutore non sarebbe disposto a scambiare 100

euro ricevendo un importo minore; in tal caso, lo scambio potrebbe avere corso solo se una delle due parti non rilevasse il vantaggio altrui.
In generale, gli agenti possono decidere di scambiare istantaneamente un certo capitale secondo diverse combinazioni di quote che complessivamente, però, debbono costituire proprio l'importo totale del capitale scambiato.
Quando lo scambio non avviene più istantaneamente, ma si conviene di ricevere il capitale in un dato istante, restituendo le quote di costituzione del capitale in maniera differita nel tempo (assieme agli interessi), allora bisognerà valutare il valore di rimborso (montante) di ogni singola quota nel tempo. È in questo momento che interviene la matematica finanziaria, che consente di effettuare questa valutazione.
È ovvio, però, che ciò dipende dal regime finanziario di interessi utilizzato: a parità di quote di costituzione del capitale scambiato, il valore di rimborso delle quote sarà diverso; allo stesso modo, di converso, a parità di valori di rimborso, il valore delle quote di costituzione del capitale sarà diverso.
Il principio di equità, allora, consente di impostare il modello per la valutazione finanziaria dell'operazione di modo che lo scambio possa avere corso, poiché equo tra le parti. E la metodologia che consente di effettuare tale valutazione è ampiamente nota in letteratura. Ad esempio, il Polidori[7] ne offre una dettagliata descrizione:
«Per risolvere un problema di matematica finanziaria, quando la risoluzione non consiste in una piana applicazione di una o più formule già note, noi consigliamo il seguente procedimento che in generale conduce alla soluzione del problema:
-si descrive l'operazione finanziaria sull'asse dei tempi (questo schema, che può essere omesso, è tuttavia molto utile a chi si inizia nello studio della nostra disciplina);
-si applica il principio dell'equivalenza finanziaria riferito al tempo zero (alle volte potrà essere consigliabile un altro tempo della durata dell'operazione)
-si ottiene così una equazione che risolta ci dà l'elemento incognito richiesto dal problema.».
Allora, quando si studia un prestito graduale, dati gli elementi necessari che consentono di definire l'operazione di scambio (la durata, la frequenza del rimborso, la tipologia di ammortamento, il regime di interessi e l'epoca di impostazione rispetto alla quale imporre l'equilibrio finanziario), l'applicazione del principio di equità consente di ricavare uno di tali elementi della ricerca (la rata, il tasso di interesse, il regime adottato o l'epoca di impostazione dell'equilibrio), noti gli altri elementi dell'operazione. A questo riguardo, i comuni strumenti di ottimizzazione messi a disposizione dagli odierni fogli elettronici di calcolo presenti sul mercato (come ad esempio, lo strumento *'ricerca obiettivo'* di MS Excel), consentono di impostare con estrema

[7] Cfr. C. Polidori, *Matematica Finanziaria*, Le Monnier, Firenze, 1954.

precisione il modello di calcolo, senza la necessità di dover ricorrere a formule preimpostate. In tal modo è possibile risolvere i problemi di calcolo relativi allo scambio e, quindi, alla generalità dei prestiti graduali, qualsiasi sia il tipo di ammortamento e la convenzione temporale utilizzata per l'operazione.
Si deve rilevare che, tra le varie tipologie di prestiti graduali, la più diffusa è quella a rata costante posticipata (c.d. "alla francese"), con l'utilizzo della convenzione temporale 30/360. Per queste operazioni, allora, è operativamente molto utile avere a disposizione delle formule che consentano di calcolare direttamente l'importo della rata senza dover impostare il modello di calcolo. In questo lavoro, allora, sono state presentate le formule adatte a questo scopo, sia in regime composto che in regime semplice degli interessi, con esempi di calcolo tramite l'utilizzo dei comuni fogli elettronici.

Appendice 1.
Nel caso di un prestito graduale definito come in equazione (6), si può dimostrare che la rata costante posticipata è ottenuta come

$$R = S\frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m - 1}.$$

Difatti, si può osservare che la (6) è una serie geometrica che può essere sviluppata, ponendo $r = (\frac{1}{1+i})$, nel modo seguente:

$$S = R\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(1+i)^k} = R\sum_{k=1}^{m}(\tfrac{1}{1+i})^k =$$

$$= R\sum_{k=1}^{m}(r)^k = R(r + r^2 + r^3 + \cdots \ldots \ldots + r^m)$$

da cui moltiplicando per r si ottiene

$$rS = R(r^2 + r^3 + \cdots \ldots \ldots + r^m + r^{m+1}).$$

Quindi, sottraendo le due precedenti equazioni si ha che

$$S - rS = R(r - r^{m+1})$$

e quindi

$$S(1 - r) = R(r - r^{m+1})$$

per cui, isolando R, si ottiene

$$R = \frac{S(1-r)}{(r - r^{m+1})}.$$

Infine, sostituendo nuovamente $r = (\frac{1}{1+i})$ si ricava

$$R=\frac{S\left(1-\left(\frac{1}{1+i}\right)\right)}{\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{m+1}\right)}=\frac{S\left(\frac{1+i-1}{1+i}\right)}{\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{m+1}\right)}=$$

$$\frac{Si\left(\frac{1}{1+i}\right)}{\left(\frac{1}{1+i}\right)\left(1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{m}\right)}=\frac{Si}{\left(1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{m}\right)}=$$

$$=\frac{Si}{\frac{(1+i)^m-1}{(1+i)^m}}=S\frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m-1}$$

che dimostra il risultato.

Appendice 2.
Nel caso di un prestito graduale definito come in equazione (7), si può dimostrare che, quando m è grande e $i \neq 200\%$, con una buona approssimazione, si può calcolare il valore della rata R come somma dei termini di una progressione armonica

$$R=\frac{S}{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(1+i)^k}}\approx\hat{R}=\frac{S}{\frac{1}{i}\ln\left(\frac{2+(2m-1)i}{2-i}\right)-1+\frac{1}{1+mi}}\ .$$

Per dimostrare tale risultato, sia data la progressione armonica

$$\frac{1}{a},\frac{1}{a+d},\frac{1}{a+2d},\cdots,\frac{1}{a+(m-1)d};d>0\ .$$

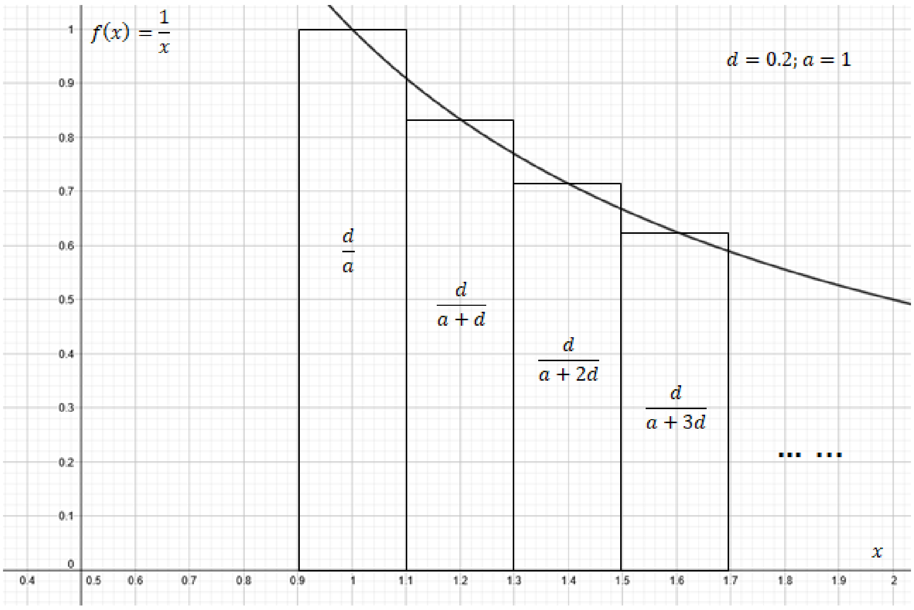
Si può dimostrare che la somma dei primi m termini della progressione armonica, quando m è grande e $d \neq 2a$, è in buona approssimazione pari a

$$\frac{1}{d}\ln\left(\frac{2a+(2m-1)d}{2a-d}\right)\ .$$

Infatti, si consideri la seguente funzione

$$f(x)=\frac{1}{x};\ x=a,a+d,a+2d,\cdots,a+(m-1)d$$

e si calcoli lo somma di *Riemann* della funzione $f(x)$ come illustrato nel seguente grafico.



Il k-esimo rettangolo della somma di *Riemann*, avrà base costante pari a d, altezza pari a $\frac{1}{a+(k-1)d}$ e area pari a $\frac{d}{a+(k-1)d}$.
La somma totale dell'area dei rettangoli sarà pari a

$$\frac{d}{a}+\frac{d}{a+d}+\frac{d}{a+2d}+\cdots+\frac{d}{a+(m-1)d}=d\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+(k-1)d}$$

che, approssimativamente, è pari all'area sotto la curva della funzione $f(x)$ nell'intervallo $\left[a-\frac{d}{2}; a+\left(m-\frac{1}{2}\right)d\right]$, ossia

$$\int_{a-\frac{d}{2}}^{a+\left(m-\frac{1}{2}\right)d}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \approx d\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+(k-1)d}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+(k-1)d} \approx \frac{1}{d}\int_{a-\frac{d}{2}}^{a+\left(m-\frac{1}{2}\right)d}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

che, procedendo al calcolo dell'integrale definito

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+(k-1)d} \approx \frac{1}{d}\ln(x)\Bigg|_{a-\frac{d}{2}}^{a+\left(m-\frac{1}{2}\right)d}$$

risulta

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+(k-1)d} \approx \frac{1}{d}\ln\left(\frac{2a+(2m-1)d}{2a-d}\right).$$

L'approssimazione è tanto più esatta quanto più m è grande rispetto a d. Ovviamente, dovrà essere $d \neq 2a$.
Sfruttando tale risultato, quando m è grande, per un prestito graduale acceso al tempo 0 per un capitale S in regime semplice al tasso

periodale i, con impostazione iniziale al tempo 0, si può calcolare una buona approssimazione $\hat{R}$ della rata costante posticipata R.
Infatti, ponendo $a = 1; d = i$, per la seguente progressione armonica

$$\frac{1}{1+i}, \frac{1}{1+2i}, \cdots\cdots, \frac{1}{1+(m-1)i}, \frac{1}{1+mi}$$

la somma dei primi m termini sarà

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+i)^k} \approx \frac{1}{i} \ln\left(\frac{2+(2m-1)i}{2-i}\right) - 1 + \frac{1}{1+mi}$$

dovendo essere $i \neq 200\%$.
Lo sviluppo dimostra, quindi, il risultato

$$R = \frac{S}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+i)^k}} \approx \hat{R} = \frac{S}{\frac{1}{i} \ln\left(\frac{2+(2m-1)i}{2-i}\right) - 1 + \frac{1}{1+mi}}.$$

La precedente formula è molto utile da un punto di vista operativo. Difatti, si può verificare che l'approssimazione diviene tanto più esatta al crescere di m.
A scopo esemplificativo si consideri un prestito acceso al tempo 0 per un capitale $S = 10.000{,}00$ da rimborsare in m rate costanti posticipate di importo R esigibili ai tempi $1,2,\cdots,m$, rispettivamente, in regime semplice con impostazione dell'equilibrio al tempo 0, al tasso annuale del 5%. Si può osservare che nel caso di prestiti graduali a rata costante mensile o trimestrale su orizzonti temporali di oltre 5 anni, tale approssimazione risulta essere sufficientemente precisa.

anni	**Frequenza del rimborso**								
	mensile			**trimestrale**			**semestrale**		
	m	R	$\hat{R}$	m	R	$\hat{R}$	m	R	$\hat{R}$
5	60	187,07	187,07	20	563,32	563,32	10	1.132,95	1.132,90
10	120	102,94	102,94	40	309,87	309,87	20	622,93	622,91
15	180	74,57	74,57	60	224,44	224,44	30	451,02	451,01
20	240	60,20	60,20	80	181,15	181,15	40	363,93	363,92
30	360	45,54	45,54	120	136,98	136,98	60	275,08	275,07

Appendice 3.
Nel caso di un prestito graduale definito come in equazione (8), si può dimostrare che la rata costante posticipata è ottenuta come

$$R = \frac{S(1+mi)}{\left(m + i\frac{m(m-1)}{2}\right)}.$$

Difatti, la (8) può essere anche scritta come

$$S = \frac{R}{(1+mi)} \sum_{k=1}^{m} (1+(m-k)i)$$

che equivale a

$$S(1+mi) = R\sum_{k=1}^{m}(1+(m-k)i)$$

e anche a

$$S(1+mi) = mR + Ri\sum_{k=1}^{m-1} k \quad .$$

La quantità $\sum_{k=1}^{m-1} k$ rappresenta la somma dei primi $(m-1)$ interi in progressione aritmetica che, come noto, risulta essere uguale a $\frac{m(m-1)}{2}$. Pertanto, ciò permette di riscrivere la precedente relazione nel seguente modo:

$$S(1+mi) = mR + Ri\frac{m(m-1)}{2}$$

da cui si ottiene

$$R = \frac{S(1+mi)}{\left(m + i\frac{m(m-1)}{2}\right)}$$

che dimostra il risultato.