Appendice Matematica

Dimostrazione algebrica dell'insorgenza di tassi negativi nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa.

a corredo di:

«Approfondimenti sull'Ammortamento in regime semplice e sull'epoca di impostazione dell'equilibrio: la falsa dicotomia $t_0 - t_m$»

di GRAZIANO ARETUSI[⊗]

16 giugno 2026

Abstract

Questa Appendice matematica raccoglie le dimostrazioni analitiche riguardanti le condizioni di segno del saggio di interesse nei piani di ammortamento a rata costante, sia in regime composto sia in regime semplice sia, infine, nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa ad un momento futuro *m*. Quest'ultimo caso riveste particolare rilevanza scientifica perché, come dimostrato nel lavoro principale, tale schema non costituisce una corretta applicazione del regime semplice, bensì una costruzione alterata che genera strutturalmente arbitraggi e, in determinate condizioni, tassi negativi.

1. La positività strutturale del saggio di interesse nei regimi finanziari composto e semplice (Rate Costanti).

In via preliminare, occorre dimostrare il comportamento del saggio di interesse nei due regimi (composto e semplice), nei quali si assume l'ipotesi standard di un capitale prestato S e di un piano di ammortamento che prevede m rate costanti R.

1.1. Regime Composto

Nel regime dell'interesse composto, l'equazione di equilibrio è data da:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R\frac{1}{(1+i)^k} = R\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^m}\right) \qquad (1)$$

Teorema: In regime composto, il tasso di interesse è non negativo ($i \geq 0$) se e solo se $R \geq \frac{S}{m}$.

Dimostrazione: La relazione discende immediatamente dal fatto che per $i \geq 0$ risulta $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+i)^k} \leq m$ e viceversa.

■

[⊗] Coordinatore scientifico Openstat.it, www.openstat.it e-mail: info@openstat.it

1.2. Regime Semplice

Nel regime semplice, l'equazione di equilibrio assume la forma:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R\frac{1}{1+ki} = R\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \cdots + \frac{1}{1+mi}\right) \qquad (2)$$

Teorema: Nel regime semplice, il tasso di interesse è non negativo $i \geq 0$) se e solo se $R \geq \frac{S}{m}$.

Dimostrazione: Analogamente al caso precedente, per $i \geq 0$ si verifica immediatamente che $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+ki} \leq m$ e viceversa.

■

In entrambi i regimi (composto e semplice), pertanto, è garantito il seguente principio logico elementare: se la somma delle rate restituite supera il capitale erogato, il tasso di equilibrio è matematicamente positivo.

2. Instabilità strutturale del saggio di interesse nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa (Rate Costanti)

Le criticità emergono nel momento in cui si intende applicare l'impostazione dell'equilibrio finanziario a un'epoca finale fissa e invariabile m per l'intera operazione, alterando la natura lineare del regime semplice. In questo schema di capitalizzazione a scadenza fissa, l'equazione regolatoria globale diviene:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R\frac{1+(m-k)i}{1+mi} = R\left(\frac{1+(m-1)i}{1+mi} + \frac{1+(m-2)i}{1+mi} + \cdots + \frac{1}{1+mi}\right). \qquad (3)$$

Moltiplicando ambo i membri per $(1+mi)$, si ottiene:

$$S(1+mi) = \sum_{k=1}^{m} R(1+(m-k)i)\,. \qquad (4)$$

Isolando la componente in i, possiamo riscrivere:

$$S(1+mi) = mR + Ri\sum_{k=1}^{m-1} k\,. \qquad (5)$$

Poiché la somma dei primi interi in progressione aritmetica è pari a $\frac{m(m-1)}{2}$, l'equazione si risolve esplicitando il tasso i:

$$i = f(R) = \frac{S - mR}{\frac{m(m-1)}{2}R - mS}\,. \qquad (6)$$

Teorema: Nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa con rate costanti appena definito, il tasso i risulta non negativo ($i \geq 0$) solo se la rata appartiene all'intervallo ristretto di accettabilità: $R \in \left[\frac{S}{m}; \frac{2S}{m-1}\right[$.

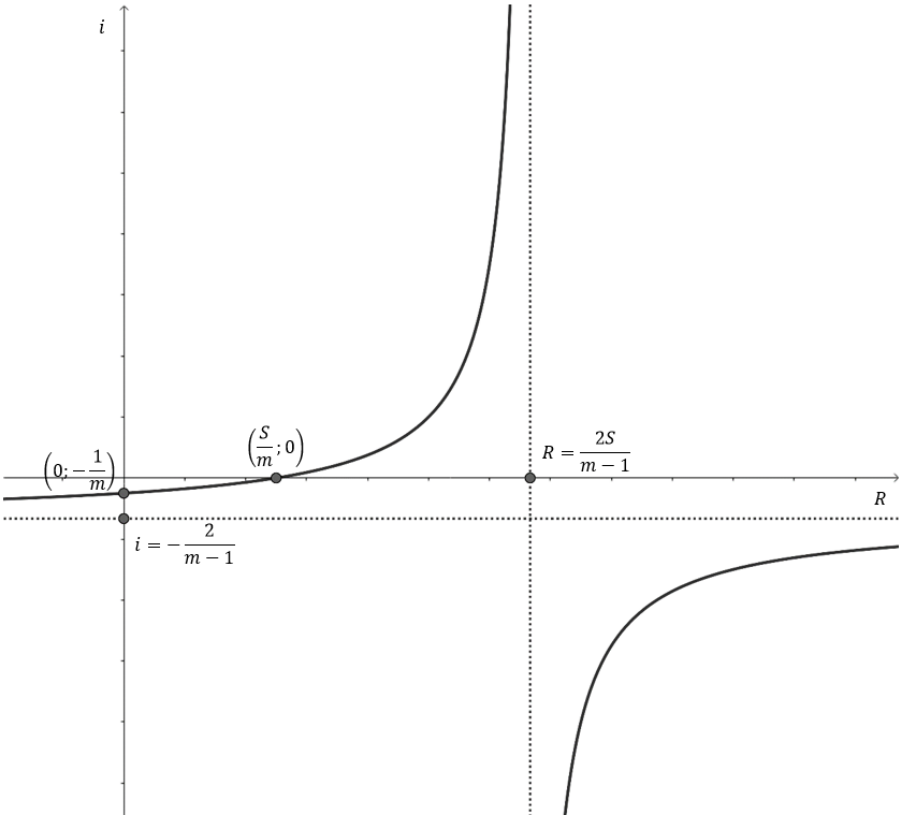
Dimostrazione: La funzione $i = f(R)$ ottenuta descrive un'*iperbole equilatera traslata*, con:

- dominio: $\left\{R \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2S}{m-1}\right\}\right\}$;
- intercetta sull'asse delle ascisse ($i = 0$): $R = \frac{S}{m}$;
- intercetta sull'asse delle ordinate ($R = 0$): $i = -\frac{1}{m}$;
- asintoto verticale: $R = \frac{2S}{m-1}$;

• asintoto orizzontale: $i = -\frac{2}{m-1}$;
• centro: $\left(\frac{2S}{m-1}; -\frac{2}{m-1}\right)$.

Il codominio della funzione $i = f(R)$ è positivo per $R \in \left[\frac{S}{m}; \frac{2S}{m-1}\right[$ e negativo altrove.

Il seguente grafico rappresenta la funzione $i = f(R)$.



Lo studio della funzione, pertanto, dimostra il teorema.

■

3. Applicazione tecnica della capitalizzazione a scadenza fissa: le condizioni di insorgenza dei tassi negativi

Nell'applicazione tecnica che si registra recentemente nel contenzioso bancario relativo agli ammortamenti a rata costante, sorge la necessità di disapplicare il regime composto per rideterminare il rapporto di scambio secondo il regime sostitutivo.

Sulla base dei precedenti risultati, si è dimostrato che mentre la sostituzione con il regime semplice garantisce la positività dei tassi, lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa può generare tassi negativi.

Dallo studio della funzione iperbolica $i = f(R)$ appena illustrato, è possibile derivare una regola algebrica immediata che fornisce al tecnico analista uno strumento per verificare a priori se l'applicazione dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa genererà un tasso negativo, basandosi esclusivamente sui parametri contrattuali elementari dell'operazione (Capitale S, Rata R, numero di scadenze m).

Assumendo la fisiologica ipotesi che il contratto preveda la restituzione di un monte rate superiore al capitale erogato (ossia $R > \frac{S}{m}$), il precedente studio di funzione consente di determinare quella soglia di instabilità del modello oltre il quale la sostituzione con lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa genera tassi negativi. Questo fenomeno, come è immediato osservare dal grafico della funzione, si presenterà ogni qualvolta si supera il valore critico in corrispondenza dell'asintoto verticale:

$$R > \frac{2S}{m-1}. \qquad (7)$$

Risolvendo la medesima disequazione specularmente rispetto alla durata m, restituisce il limite temporale massimo di applicabilità dello schema:

$$m > 1 + 2\frac{S}{R}. \qquad (8)$$

Questi risultati analitici consentono di tabulare la casistica pratica in relazione alla struttura negoziale di gran lunga predominante sul mercato creditizio: gli ammortamenti a rata costante posticipata in regime composto con tasso periodale convertibile (ovvero il tasso nominale annuo diviso per il numero di rimborsi in un anno) e convenzione temporale 30/360 (anno commerciale), così offrendo uno strumento operativo immediato per individuare le soglie critiche oltre le quali la sostituzione con lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa, produce strutturalmente l'inversione di segno del saggio di interesse.

Tabella 1. Soglie critiche di instabilità dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa. *I valori percentuali indicati in tabella rappresentano il tasso annuo del piano di ammortamento originario in regime composto a rata costante. Qualora il saggio contrattuale originario sia superiore al valore tabulato per la corrispondente durata e frequenza di rimborso, il piano ricalcolato imponendo lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa produrrà strutturalmente un tasso negativo.*

	Frequenza del rimborso				
anni	mensile	trimestrale	quadrimestrale	semestrale	annuale
5	32,50%	33,82%	34,51%	35,99%	41,19%
10	16,09%	16,41%	16,57%	16,91%	17,99%
15	10,69%	10,83%	10,90%	11,05%	11,50%
20	8,01%	8,08%	8,12%	8,20%	8,46%
25	6,40%	6,45%	6,47%	6,53%	6,68%
30	5,33%	5,36%	5,38%	5,42%	5,52%

A titolo esemplificativo, si ponga in analisi un mutuo con durata trentennale e rimborso a rata costante trimestrale calcolata in regime composto al tasso del 5,50%. Poiché tale saggio risulta strettamente maggiore della soglia critica d'instabilità tabulata (pari al 5,36%), la sostituzione dell'algoritmo originario con lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa produrrà con certezza matematica un tasso negativo nella metrica a scadenza fissa adottata.

4. Generalizzazione dei risultati al caso di rate non costanti.

L'incoerenza intrinseca dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa emerge in modo ancor più dirompente qualora si abbandoni la semplificazione delle rate costanti per analizzare il caso generale di un piano

di ammortamento a rate variabili. Tale scenario non costituisce un'ipotesi astratta, bensì rappresenta la normalità nella dinamica dei rapporti di credito reali, all'interno dei quali possono intervenire variazioni strutturali delle scadenze — come rimborsi anticipati parziali o sospensioni dei pagamenti — o, più semplicemente, la strutturazione originaria di piani ad ammortamento variabile (es. ammortamento italiano, a quote ammortamento costanti).
Per comprendere appieno la distorsione, è doveroso verificare, in via preliminare, come sia il regime composto che quello semplice mantengano intatte le proprie caratteristiche anche in presenza di rate variabili, per poi illustrare le singolarità dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa.

4.1. La positività strutturale del saggio di interesse nei regimi finanziari composto e semplice (Rate variabili)

Nel regime dell'interesse composto, l'equazione di equilibrio è data da:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \frac{1}{(1+i)^k} \qquad (9)$$

mentre nel regime dell'interesse semplice, la medesima equazione dell'equilibrio assume la seguente forma:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \frac{1}{1+ki}. \qquad (10)$$

Teorema: In regime composto e in regime semplice, il tasso di interesse di equilibrio risulta non negativo ($i \geq 0$) se e solo se

$$\sum_{k=1}^{m} R_k \geq S. \qquad (11)$$

Dimostrazione: Entrambe le equazioni possono essere espresse nella forma $S = f(i)$, dove la funzione di attualizzazione $f(i)$ è strettamente decrescente rispetto al tasso i. Ponendo il tasso pari a zero ($i = 0$), in ambedue i regimi i fattori di attualizzazione divengono unitari, restituendo $f(0) = \sum_{k=1}^{m} R_k$.
Essendo le funzioni strettamente decrescenti, la condizione $f(i) \leq f(0)$ (ovvero $S \leq \sum_{k=1}^{m} R_k$) è matematicamente verificata se e solo se $i \geq 0$.
■

Indipendentemente dalla distribuzione temporale dei pagamenti e dal regime (semplice o composto), i risultati confermano che il saggio i di equilibrio si mantiene non negativo se il debitore restituisce una somma globale almeno pari al capitale S.

4.2. Instabilità strutturale del saggio di interesse nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa (Rate Variabili)

Al contrario, lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa rivela sempre delle singolarità strutturali legate alla violazione del vincolo temporale, anche quando generalizzato al caso delle rate variabili.
Teorema:
Data un'operazione finanziaria con capitale erogato S e m rate generiche non costanti R_k, nello schema di capitalizzazione a scadenza fissa l'equazione regolatoria globale è:

$$S(1+mi) = \sum_{k=1}^{m} R_k(1+(m-k)i)\,. \qquad (12)$$

Il tasso di interesse i risulta non negativo ($i \geq 0$) se e solo se sono simultaneamente verificate le seguenti condizioni:

1. $\sum_{k=1}^{m} R_k \geq S$
2. $\sum_{k=1}^{m} R_k(m-k) < Sm\,.$ (13)

Dimostrazione: Sviluppando algebricamente i prodotti dell'equazione e separando i termini dipendenti dalla variabile del saggio i, si ricava:

$$S + Smi = \sum_{k=1}^{m} R_k + i\sum_{k=1}^{m} R_k(m-k)\,. \qquad (14)$$

Raggruppando e isolando il saggio i, si ottiene l'espressione della funzione razionale:

$$i = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k - S}{Sm - \sum_{k=1}^{m} R_k(m-k)}\,. \qquad (15)$$

Assumendo che il monte rate complessivo sia tale da rimborsare almeno il capitale erogato ($\sum_{k=1}^{m} R_k \geq S$), il numeratore assume stabilmente segno positivo o nullo. Di conseguenza, affinché l'intero rapporto restituisca un valore non negativo ($i \geq 0$), è condizione algebrica necessaria e sufficiente che il denominatore sia strettamente positivo:

$$Sm - \sum_{k=1}^{m} R_k(m-k) > 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{m} R_k(m-k) < Sm \qquad (16)$$

L'analisi dei segni subordina biunivocamente la positività del saggio al vincolo restrittivo imposto dalla disequazione del denominatore.

■

Questa generalizzazione evidenzia in modo chiaro i limiti concettuali dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa. Il termine $\sum_{k=1}^{m} R_k(m-k)$ rappresenta la sommatoria dei flussi di rimborso ponderati per la loro distanza temporale residua $(m-k)$ rispetto alla scadenza finale.
Qualora il debitore effettui rimborsi anticipati parziali nelle prime fasi del piano (quando le scadenze k sono prossime all'origine), tali pagamenti intercettano un coefficiente di ponderazione $(m-k)$ prossimo al suo valore massimo. Ciò determina una crescita repentina della sommatoria che, superando la soglia critica Sm, rende istantaneamente negativo il denominatore della funzione (15).
Si genera così un insanabile paradosso: l'algoritmo restituisce un tasso di interesse negativo a prescindere dal fatto che la somma assoluta dei rimborsi superi il capitale prestato. Lo schema, anziché assecondare la riduzione del debito, sanziona algebricamente le estinzioni parziali invertendo la natura onerosa del credito, confermandosi un costrutto spurio e inidoneo a governare la flessibilità dei rapporti finanziari reali.
Per rendere immediatamente tangibile il paradosso algebrico appena dimostrato, si consideri il seguente Esempio 1.

Esempio 1. Sia dato un finanziamento con le seguenti caratteristiche:

- **Capitale erogato (S):** 10.000 €
- **Scadenza finale fissa (m):** 5 anni

Si ipotizzi che il debitore, avendo a disposizione una somma rilevante, effettui un sostanzioso rimborso parziale al termine del primo anno e prosegua con rate minime per i restanti quattro anni:

- R_1 (anno 1) = 12.000 €
- R_2 (anno 2) = 1.000 €
- R_3 (anno 3) = 1.000 €
- R_4 (anno 4) = 1.000 €
- R_5 (anno 5) = 1.000 €

Dal punto di vista puramente finanziario, l'operazione è altamente onerosa per il debitore e profittevole per il creditore: **a fronte di un prestito di 10.000 euro, il debitore ha restituito complessivamente 16.000 euro**.
Tuttavia, se il perito applicasse lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa (impostando l'equazione globale (12) all'epoca $m = 5$), l'algoritmo produrrebbe il seguente sviluppo:

$$S(1+5i) = R_1(1+4i) + R_2(1+3i) + R_3(1+2i) + R_4(1+i) + R_5$$

Sostituendo i valori monetari

$$10.000(1+5i) = 12.000(1+4i) + 1.000(1+3i) + 1.000(1+2i) + 1.000(1+i) + 1.000$$

e svolgendo i calcoli

$$10.000 + 50.000i = \\ = (12.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000 + 1.000) + i(48.000 + 3.000 + 2.000 + 1.000)$$

si ottiene

$$10.000 + 50.000i = 16.000 + 54.000i \ .$$

Quindi, isolando l'incognita i

$$50.000i - 54.000i = 16.000 - 10.000$$

risulta

$$-4.000i = 6.000$$

da cui si ottiene

$$i = -\frac{6.000}{4.000} \Rightarrow i = -1{,}5 \ .$$

In tal caso, pertanto, il tasso di interesse calcolato dallo schema di capitalizzazione a scadenza fissa risulta pari a **-150%**.
Sebbene la banca abbia incassato 6.000 € in più rispetto al capitale prestato, la distorsione temporale causata dall'ancoraggio del rimborso iniziale R_1 a un orizzonte lontano 4 anni (con $m = 5$), ha fatto letteralmente esplodere il peso del denominatore, invertendo il segno del saggio.

▲

La generalizzazione appena dimostrata trova un'applicazione ancor più paradossale qualora si utilizzi lo schema di capitalizzazione a scadenza fissa per la determinazione del costo reale dell'operazione (ad esempio per la valutazione del TEG o del TAEG). Tale casistica prevede la presenza di oneri trattenuti all'origine (es. spese di istruttoria, perizie, polizze assicurative) che

vanno decurtati dal finanziamento, riducendo di fatto il capitale netto effettivamente erogato al mutuatario[1].
Senza necessità di introdurre ulteriori espressioni algebriche, è sufficiente osservare il comportamento del denominatore $Sm - \sum_{k=1}^{m} R_k(m-k)$ della nostra funzione (15), per certificare l'inadeguatezza dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa.
L'abbassamento del valore del capitale erogato S (dovuto alla trattenuta dei costi) riduce proporzionalmente l'entità della componente Sm. Al contrario, la sommatoria ponderata delle rate, $\sum_{k=1}^{m} R_k(m-k)$, resta invariata. Questo fenomeno accelera e amplifica drasticamente il passaggio alla negatività del denominatore della (15). Il risultato è un cortocircuito finanziario: l'aggiunta di costi a carico del cliente, anziché innalzare fisiologicamente il saggio effettivo, spinge il denominatore della (15) sotto zero e restituisce un tasso negativo. A titolo esemplificativo, si consideri il seguente Esempio 2.
Esempio 2. Sia dato un prestito di $S = 10.000$ euro della durata di $m = 10$ anni, da restituire in 10 rate annue costanti da $R = 1.500$ euro ciascuna.
La somma delle rate è 15.000 euro. La sommatoria ponderata dei rimborsi, $\sum_{k=1}^{10} R_k(10-k)$, è pari a 67.500.

- **Caso A (Senza costi iniziali):** Il capitale erogato netto è 10.000 €.
  - Componente $Sm = 10.000 \times 10 = 100.000$
  - Denominatore: $100.000 - 67.500 = \mathbf{+32.500}$
  - Numeratore: $15.000 - 10.000 = \mathbf{5.000}$
  - Tasso reale calcolato: $5.000 / 32.500 = 0{,}1538$ (**+15,38%**).
    In assenza di costi, la componente Sm è abbastanza grande da mantenere il denominatore positivo.
- **Caso B (Con costi iniziali):** La banca trattiene **4.000 €** per spese di istruttoria. Il capitale erogato netto S scende a **6.000 €**.
  - Componente $Sm = 6.000 \times 10 = 60.000$
  - Denominatore: $60.000 - 67.500 = \mathbf{-7.500}$
  - Numeratore: $15.000 - 6.000 = \mathbf{9.000}$
  - Tasso reale calcolato: $9.000 / -7.500 = -1{,}20$ (**-120,00%**).

A fronte di un palese aggravio di 4.000 € a danno del cliente (che rende il prestito molto più caro), la riduzione della componente Sm manda in tilt l'algoritmo dello schema a scadenza fissa, il quale reagisce invertendo il segno e restituendo il saggio negativo del -120%.

▲

Tale evidenza sanziona in via definitiva l'inidoneità dello schema di capitalizzazione a scadenza fissa nella pratica tecnica.

[1] Questa classe di esempi è stata cortesemente segnalata dal Dott. Carmine Mario Germinara, attento e appassionato studioso della materia il quale ha potuto rilevare il fenomeno in una vasta casistica.